LOGIKA MATEMATIKA

Tim Penyusun :

Yulisa Gardenia, SE, MMSI

Cynthia Rahmawati, S.Si, M.Si(Han)

KATA PENGANTAR

Puji syukur kami panjatkan kehadirat Tuhan YME, atas rahmatNya buku ini dapat kami selesaikan dengan baik.

Logika matematika merupakan mata kuliah dengan jumlah sks 2 dan diberikan kepada mahasiswa semester 3.

Buku ini membahas konsep – konsep dasar yang digunakan dalam logika matematika secara mudah dan sederhana sehingga mahasiswa dapat mengerti dan menyelesaikan mata kuliah ini dengan baik.

Kami, mengucapkan terima kasih kepada rekan – rekan yang telah membantu dalam proses pembuatan buku ini.

Jakarta, 12 Juli 2022

Penulis

DAFTAR ISI

1

PENGANTAR LOGIKA MATEMATIKA

Logika (*logic*) berasal dari Bahasa Yunani "*logos*" yang berarti "kata", "ucapan", atau "alasan". Logika dapat diartikan ilmu yang berhubungan dengan prinsip-prinsip validitas penalaran dan argumen-argumen.

Istilah logika matematika diperkenalkan pertama kali oleh **Giuseppe Peano** (1858 – 1932). **Logika matematika** merupakan aturan – aturan logika yang menggunakan kaidah – kaidah matematika yang digunakan untuk membuktika validasi suatu **argument**.

1.1 PENDAHULUAN

Penarikan kesimpulan tentang validasi argumen dinamakan **logika deduktif** (*deductive reasoning*), dimana nilai kebenaran kesimpulan harus mengikuti kebenaran premis-premisnya. Jadi, tidak mungkin kesimpulan yang salah diperoleh dari premis-premis yang benar, atau satu saja premis salah, maka kesimpulan juga bernilai salah.

Ada juga **Logika induktif** (*inductive logic*) yang pengertiannya sama dengan logika deduktif, tetapi penarikan kesimpulan disertai dengan tampilnya beberapa kesimpulan yang menyertainya.

1.2 ARGUMEN

Argumen adalah rangkaian pernyataan-pernyataan yang mempunyai ungkapan pernyataan penarikan kesimpulan (inferensi). Argumen terdiri dari pernyataan – pernyataan yang terdiri atas dua kelompok, yaitu kelompok pernyataan sebelum kata 'jadi' yang disebut premis (hipotesa) dan pernyataan setelah kata 'jadi' yang disebut konklusi (kesimpulan).

Contoh 1 :

Semua mahasiswa pandai

Badu adalah mahasiswa

Premis

Dengan demikian, Badu pandai → Kesimpulan

Contoh 2 :

Semua manusia bermata empat

Badu seorang manusia

Premis

Dengan demikian, Badu bermata empat → Kesimpulan

Contoh 1 dapat dikatakan logis karena pernyataan 1 dan 2, memiliki kesimpulan yang berasal dari premisnya dan masuk di akal **(valid)**. Contoh 2 dapat dikatakan logis karena pernyataan 1 dan 2, tetapi kesimpulan yang diberikan tidak masuk di akal **(tidak valid)**.

Argumen adalah suatu usaha untuk mencari kebenaran dari pernyataan berupa kesimpulan, berdasarkan kebenaran dari satu kumpulan pernyataan yang disebut **premis**.

PREMIS = PERNYATAAN

1.3 VALIDITAS ARGUMEN

Validitas Argumen adalah premis – premis yang diikuti oleh suatu kesimpulan yang berasal dari premis – premisnya dan **bernilai benar**. Jadi validitas argumen tergantung pada bentuk argumen itu dan dengan bantuan tabel kebenaran.

2

HIMPUNAN

2.1. PENGERTIAN HIMPUNAN

Himpunan didefinisikan sebagai kumpulan obyek-obyek yang berbeda (Liu, 1986). Himpunan dinotasikan dengan huruf besar A,B,C…

Objek dalam himpunan disebut elemen/anggota himpunan, yang disimbolkan dengan huruf kecil. Ada 2 cara untuk menyatakan himpunan yaitu dengan menuliskan tiap-tiap anggota himpunan di antara 2 kurung kurawal atau menuliskan sifat2nya.

X merupakan anggota dari himpunan A, maka dituliskan $x \in A$ dibaca "x adalah anggota A" atau "x ada dalam A"atau "x adalah elemen A. Sebaliknya jika x bukan anggota A, dituliskan $x \in A$.

Contoh :

A = {anjing, kucing, burung}

B = {x │ x = hewan-hewan di kebun binatang}

Jika fungsi mod menyatakan sisa hasil bagi bulat, himpunan bilangan genap dapat dinyatakan dengan

C $\{x \in \text{Bulat} \mid x \bmod 2 = 0\}$

Jika $x = 6$ dan $y = 9$, maka $x \in C$ dan $y \in C$

2.2. PENYAJIAN HIMPUNAN

Ada 4 cara untuk menyatakan suatu himpunan, yaitu:

1. **Enumerasi**

Mengenumerasi artinya menulis semua elemen himpunan yang bersangkutan di antara dua buah tanda kurung kurawal. Biasanya himpunan diberi nama dengan menggunakan huruf kapital maupun dengan menggunakan simbol-simbol lainnya.

Contoh :

1. Himpunan A berisi empat bilangan asli.
   Dapat ditulis sebagai berikut A = {1,2,3,4}
2. Himpunan B berisi lima bilangan genap positif pertama.
   Dapat ditulis sebagai berikut B = {2,4,6,8,10}
3. Himpunan C berisi 100 buah bilangan asli pertama.
   Dapat ditulis sebagai berikut C = {1,2,…,100}
4. Himpunan Z berisi bilangan bulat.
   Dapat ditulis sebagai berikut Z = {…, -2, -1, 0, 1, 2,…}

Keanggotaan

x ∈ A : x merupakan anggota himpunan A;

x ∉ A : x bukan merupakan anggota himpunan A.

Contoh:

Misalkan: A = {1, 2, 3, 4}, R = { a, b, {a, b, c}, {a, c} }

K = {{}}

maka

3 ∈ A

{a, b, c} ∈ R

c ∉ R

{} ∈ K

{} ∉ R

2. Simbol – simbol Baku

Beberapa simbol baku yang biasa digunakan untuk mendefinisikan himpunan antara lain:

P = himpunan bilangan bulat positif.
N = himpunan bilangan alami (natural).
Z = himpunan bilangan bulat
Q = himpunan bilangan rasional
R = himpunan bilangan riil
C = himpunan bilangan kompleks
U = himpunan semesta

3. Notasi Pembentuk Bilangan

Himpunan dinyatakan dengan menulis syarat yang harus dipenuhi anggotanya.

Notasi: { x | syarat yang harus dipenuhi oleh x }

Aturan dalam penulisan syarat keanggotaan:

a. Bagian di kiri tanda ‘|’ melambangkan elemen himpunan
b. Tanda ‘|’ dibaca *dimana* atau *sedemikian sehingga*

c. Bagian di kanan tanda ‘|’ menunjukan syarat keanggotaan himpunan
d. Setiap tanda ‘,’ di dalam syarat keanggotaan dibaca dan

Contoh:

1. A adalah himpunan bilangan bulat positif yang lebih kecil dari 5.
   Dinyatakan sebagai:
   A = { x | x adalah himpunan bilangan bulat posif lebih kecil dari 5}
   Notasi matematikanya:
   $A = \{ x \mid x \in P, x < 5 \}$
   Yang ekivalen dengan $A = \{ 1, 2, 3, 4 \}$

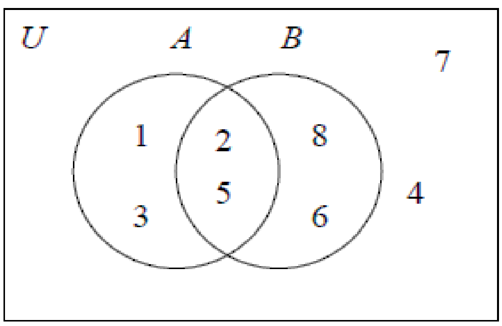
2. B adalah himpunan bilangan genap positif yang lebih kecil atau sama dengan 8.
   Dinyatakan sebagai:
   B = { x | x adalah himpunan bilangan genap positif yang lebih kecil dari 8 }
   Notasi Matematikanya:
   $B = \{ x \mid x/2 \in P, 2 < x < 8 \}$

4. Diagram Venn

Diagram Venn menyajikan himpunan secara grafis. Didalam diagram Venn, himpunan semesta (U) digambarkan sebagai suatu segi empat sedangkan himpunan lainnya digambarkan sebagai lingkaran di dalam segi empat tersebut.

Contoh:
Misalkan U = {1, 2, …, 7, 8},
A = {1, 2, 3, 5} dan
B = {2, 5, 6, 8}.

Diagram Venn:



2.3. HIMPUNAN BAGIAN DAN KUASA

Semesta pembicara (simbol S) adalah himpunan semua objek yang dibicarakan. Suatu himpunan yang tidak mempunyai anggota disebut himpunan kosong, diberi simbol Ø atau {}.

Jika A dan B adalah himpunan, maka A disebut juga himpunan bagian (subset) dari B bila dan hanya bila setiap anggota A juga merupakan anggota B

$$A \subseteq B \Leftrightarrow ((\forall x)\ x \in A \Rightarrow x \in B)$$

Jika A adalah himpunan bagian B, dikatakan juga bahwa B memuat A ($B \supseteq A$). Arti tulisan dibawah ini adalah

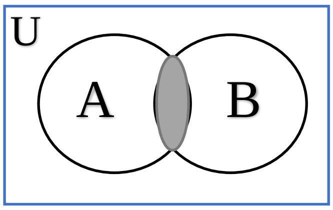
$$A \subseteq B \Leftrightarrow ((\exists x)\ x \in A \wedge x \notin B)$$

2.4. OPERASI PADA HIMPUNAN

1. Irisan (perpotongan / intersection)

Irisan himpunan A dan himpunan B adalah himpunan yang setiap elemennya merupakan elemendari himpunan A dan himpunan B. Irisan dinyatakan dengan A∩B yang dibaca ”A irisan B”.

Diagram Venn untuk A∩B

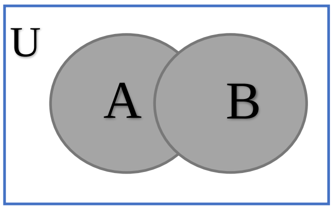


Contoh:
S = {a, b, c, d} dan T = {b, d, f, g}
Maka S∩T = {b, d}
Dapat dinyatakan dengan $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ dan } x \in B\}$
Setiap himpunan A dan himpunan B mengandung $A \cap B$ sebagai subhimpunan, yaitu
$(A \cap B) \subset A$ dan $(A \cap B) \subset B$
Jika himpunan A dan himpunan B tidak mempunyai elemen-elemen yang dimiliki bersama, berarti A dan B terpisah, maka irisan dari keduanya adalah himpunan kosong.

2. Gabungan (perpaduan / union)

Gabungan (Union) himpunan dari A dan B adalah himpunan yang setiap anggotanya merupakan anggota himpunan A atau B atau keduanya. Union tersebut dapat dinyatakan sebagai A∪B dibaca A union B.

Diagram venn dari A∪B



Contoh

A = {a, b, c, d} dan B = {e, f, g}

Maka A ∪ B = {a, b, c, d, e, f, g}

Union A dan B dapat didefinisikan secara ringkas sebagai berikut

A ∪ B = {x | x ∈ A atau x ∈ B}

Berlaku hukum A ∪ B = B ∪A

A dan B kedua-duanya juga selalu berupa subhimpunan dari A∪B, yaitu

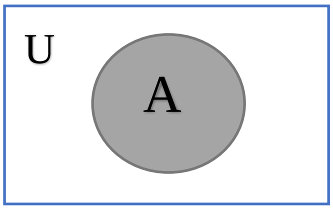
A ⊂ (A ∪ B) dan B ⊂ (A ∪ B)

3. Komplemen (complement)

Komplemen dari suatu himpunan A terhadap himpunan semesta U adalah suatu himpunan yang elemennya merupakan elemem U yang bukan elemen A, yaitu selisih dari himpunan semesta U dan A. Komplemen dapat didefinisikan secara ringkas sebagai berikut

A' = {x | x ∈ U dan x ∉ A} atau A' = {x | x ∉ A}

Diagram Venn dari A'.



Contoh:

Misalkan U = {1,2,3,…,9}

A = {1,3,7,9} carilah A' !

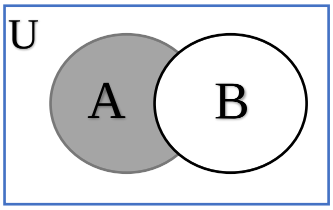
JAWAB

A' = {2,4,6,8}

4. Selisih (difference)

Selisih dari himpunan A dan B adalah suatu himpunan yang elemennya merupakan elemen A dan bukan elemen B. Dinyatakan dengan A – B dibaca "selisih A dan B" atau "A kurang B". Himpunan A mengandung A – B sebagai subhimpunan, berarti(A – B) ⊂ A.

Diagram Venn untuk A – B

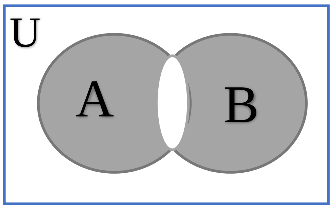


Contoh:
Jika A = { 1,2,3,...10} dan B = { 2,4,6,8,10} Carilah A – B dan B – A!
Jawab
A – B = { 1,3,5,7,9}
B – A = 0 {himpunan kosong}

5. Beda setangkup (symmetric difference / selisih simetri)

Beda setangkup dari himpunan A dan B adalah suatu himpunan yang elemennya ada pada himpunan A dan B tetapi tidak pada keduanya.

Diagram Venn untuk $A \oplus B$



Contoh:
Jika A = { 2, 4,6} dan B = { 2,3,5} Carilah $A \oplus B$!
Jawab
$A \oplus B$ = { 3,4,5,6}

Latihan Soal

1. Jika A = {2, 4, 6, 8, 10} dan B = {4, 10, 14, 18} carilah $A \cap B$!
2. Jika A = { 2, 5, 8 , 10} dan B = { 7, 5, 22 }, carilah $A \cup B$!
3. Jika A = {1, 2, 4, 6 } dan B = { 2, 3, 5,7 }, carilah $A \oplus B$!

3

LOGIKA PROPOSISI

3.1. DASAR LOGIKA

Logika lebih mengacu pada penalaran sintaktik, karena menghasilkan suatu pernyataan – pernyataan (*statements*) yang dapat bernilai benar (*true*) atau salah (*false*) dan menghasilkan kesimpulan berdasarkan pernyataan – pernyataan tersebut.

Contoh :

Perhatikan argument berikut:

1) Jika harga gula naik, maka pabrik gula akan senang.
2) Jika pabrik gula senang, maka petani tebu akan senang.
3) Dengan demikian, jika harga gula naik, maka petani tebu senang.

Maka,

Jika harga gula naik, maka pabrik gula akan senang.
Jika pabrik gula senang, maka petani tebu akan senang. Premis dari argumen
Dengan demikian, jika harga gula naik, maka petani tebu senang.

Jadi, jika suatu argumen memiliki premis-premis yang benar, maka kesimpulan juga harus benar.

Contoh :

Perhatikan argumen berikut:

1) Program computer ini memiliki *bug*, atau masukkan salah
2) Masukannya tidak salah
3) Dengan demikian, program komputer ini memiliki *bug*

Pada contoh pertama argument menggunakan “jika…maka…” (if…then) untuk merangkai dua pernyataan yang membentuk pernyataan majemuk (compound statements), sedangkan pada contoh kedua memakai “atau (or)”

3.2. PROPOSISI

Proposisi adalah setiap pernyataan yang bernilai benar atau salah. Tidak bisa kedua – duanya atau nilai lainnya.

Contoh:

a) Angka 8 adalah angka keberuntungan
b) Angka 13 adalah angka sial
c) Indonesia negara yang kaya raya

Ketiga contoh diatas mengandung perdebatan, karena setiap orang memiliki pendapat berbeda – beda. Ada yang menganggap benar dan ada yang menganggapnya salah. Dengan kata lain, pernyataan diatas tidak dapat dijadikan proposisi.

Proposisi harus berbentuk suatu pernyataan yang berupa kalimat, harus memiliki subjek dan predikatnya masing-masing dan bisa ditambah objeknya.

3.3. VARIABLE DAN KONSTANTA PROPOSISI

Huruf – huruf A, B dan C menggantikan proposisi – proposisi yang disebut variable proposisional (*propositional variables*) yang hanya memiliki nilai benar (True=T) atau salah (False=F).

Perlu diperhatikan penggunaan B(benar) dan S(salah) tidak dipakai.

Pernyataan proposisi majemuk “A atau B”, maka nilai A = T atau B = F, atau sebaliknya. T dan F disebut konstanta – konstanta proposisional (*propositional constants*).

Variabel dan konstanta proposisional adalah proposisi atomil (atomic propositions), yakni proposisi yang tak dapat dipecah lagi. Menggabungkan beberapa proposisi atomic dengan perangkat tertentu menghasilkan proposisi majemuk (*compound proposisition*).

Contoh:

A atau B	(A or B)
A dan B	(A and B)
Bukan A	(not A)

Jadi, kata “atau (or)”, “dan (and)”, dan “bukan (not)”digunakan sebagai penghubung untuk menghubungkan proposisi – proposisi disebut penghubung dasar atau peghubung alamiah (*natural connectives*).

LATIHAN

Manakah dari pernyataan – pernyataan berikut adalah proposisi ?

a) Apakah jawabanmu ini sudah benar, Bowo?

b) Bowo pergi kuliah

c) 4 adalah angka prima

d) 4 adalah bukan angka prima

e) Bowo, pergilah ke sekolah sekarang juga!

4

TABEL KEBENARAN

Logika hanya menekankan bahwa premis – premis yang benar harus menghasilkan kesimpulan yang benar (*valid*), bukan kebenaran secara actual atau sehari – hari (*actual truth*).

4.1. PENGERTIAN TABEL KEBENARAN

Tabel kebenaran adalah suatu table yang menunjukkan secara sistematis satu demi satu nilai – nilai kebenaran sebagai hasil kombinasi dari proposisi – proposisi yang sederhana.

Dasar logika tentang kebenaran dan ketidakbenaran dengan menggunakan operator, yaitu :

“dan (and)”, “atau (or)”, “bukan (not)”, “jika..maka..(if..then../implies)”,

dan “jika hanya jika (if and only if)”.

Contoh:

“Jika…maka..”

- Jika hujan, maka Budi basah kuyup

“dan”

- Budi menabrak pagar rumah dan menginjak – injaknya
- Budi menginjak – injak pagar rumah dan menabraknya

4.2. OPERATOR

Operator	Simbol
Dan (and)	ˆ
Atau (or)	ˇ
Bukan (not)	¬
Jika..maka..(if..then../implies)	→
Jika dan hanya jika (if and if only)	↔

Gambar 4.1 Perangkai dan Simbol

Setiap operator memiliki nilai kebenarannya masing – masing sesuai jenis operator yang digunakan.

1. Konjungsi (ˆ)

Konjungsi adalah kata lain dari operator “dan (and)”. Jika A dan B bernilai benar, maka keduanya benar. Tabel kebenaran dari konjungsi adalah sebagai berikut :

A	B	A ˆ B
F	F	F
F	T	F
T	F	F
T	T	T

Gambar 4.2 Tabel Kebenaran Konjungsi

2. Disjungsi (ˇ)

Tanda digunakan sama dengan perangkai “atau (or)”. Disjungsi berfungsi sebagai perangkai binary. Jika A dan B salah, maka keduanya bernilai sama.

A	B	A ˇ B
F	F	F
F	T	T
T	F	T
T	T	T

Gambar 4.3 Tabel Kebenaran Disjungsi

3. Negasi (¬)

Negasi digunakan untuk menggantikan perangkai "not (bukan)". Pernyataan ini menggunakan "A".

A	¬A	¬¬A
F	T	F
T	F	T

Gambar 4.4 Tabel Kebenaran Negasi

4. Implikasi (→)

Implikasi menggantikan perangkai "jika..maka..(if..then..)". Proposisi yang bernilai salah, jika A benar dan B salah.

A	B	A → B
F	F	T
F	T	T
T	F	F
T	T	T

Gambar 4.5 Tabel Kebenaran Implikasi

5. Ekuivalensi (↔)

Ekuivalensi dengan simbol (↔) menggantikan operator ‘jika dan hanya jika, (if and only if). Proposisi yang bernilai benar, jika A dan B bernilai sama.

A	B	A ↔ B
F	F	T
F	T	F
T	F	F
T	T	T

Gambar 4.6 Tabel Kebenaran Ekuivalensi

6. Bukan Dan (|)

Operator bukan dan biasa disebut operator NADN. Proposisi yang bernilai salah, jika A benar dan B benar.

A	B	A | B
F	F	T
F	T	T
T	F	T
T	T	F

Gambar 4.7 Tabel Kebenaran Bukan Dan

7. Bukan Atau (↓)

Proposisi yang bernilai benar , jika A salah dan B salah. Jika diperhatikan nilai kebenaran terbalik dari A ˇ B.

A	B	A ↓ B
F	F	T
F	T	F
T	F	F
T	T	F

Gambar 4.8 Tabel Kebenaran Bukan Dan

8. Xor (⊕)

Proposisi yang bernilai benar, jika A dan B bernilai sama. Jika diperhatikan nilai pada table kebenarannya terbalik dari A ↔ B.

A	B	A ⊕ B
F	F	F
F	T	T
T	F	T
T	T	F

Gambar 4.9 Tabel Kebenaran Xor

Latihan Soal

Buatlah Tabel Kebenaran dengan semua kemungkinan nilai kebenaran dari ekspresi – ekspresi logika berikut ini:

1. ¬(¬A ˆ ¬B)
2. A ˆ (A ˇ B)
3. ((¬ A ˆ (¬ B ˆ C)) ˇ (B ˆ C)) ˇ (A ˆ C)
4. (A → B) (¬ B → ¬ A)

5

ARGUMEN DAN VALIDASI ARGUMEN

5.1. PENGERTIAN ARGUMEN

Argumen adalah kumpulan pernyataan yang disebut premis – premis dan diikuti oleh kesimpulan yang selaras dengan premis – premisnya. Jika premis – premis bernilai benar, maka kesimpulan juga harus bernilai benar, sehingga argumen tersebut disebut argumen yang secara logis kuat (sound argument).

Jadi tidak mungkin suatu premis – premis yang bernilai benar akan diikuti oleh kesimpulan yang benilai salah, atau premis – premis yang benilai salah tidak mungkin menghasilkan kesimpulan yang bernilai benar.

Contoh:

- Jika anda belajar rajin, maka anda lulus rajin.
- Jika anda lulus ujian, maka anda senang.
- Dengan demikian, jika anda belajar rajin, maka anda senang

Pernyataan 1 dan 2 merupakan premis – premis dari argumen, sedangkan pernyataan 3 merupakan kesimpulan yang mengikuti atau berasal dari premis – premisnya.

Argumen pada contoh dibawah ini menggunakan perangkai "jika…maka…(if…then…)".

- Jika anda belajar rajin, maka anda lulus rajin.
- Jika anda lulus ujian, maka anda senang.
- Dengan demikian, jika anda belajar rajin, maka anda senang

1. Silogisme Hipotesis

Penggantian proposisi dengan huruf pada contoh 1:

A = Anda belajar rajin.

B = Anda lulus ujian.

C = Anda senang.

Bentuk argument diatas menjadi :

1. Jika A, maka B
2. Jika B, maka C
3. Jika A, maka C

2. Silogisme Disjungtif

Penggantian proposisi dengan huruf pada contoh 2 :

A = Program computer ini mempunyai *bug*.

B = Masukannya salah.

Bentuk argument diatas menjadi :

1. A atau B
2. Tidak B
3. A

3. Silogisme Hipotesis

Bentuk silogisme adalah argumen yang berisi 2 pernyataan berupa premis – premis dan diikuti 1 pernyataan berupa kesimpulan.

4. Modus Ponens

- Jika lampu lalu lintas menyala merah, maka semua kendaraan berhenti.
- Lampu lalu lintas menyala merah.
- Dengan demikian, semua kendaraan berhenti.

Jika argument di atas diganto dengan huruf seperti berikut:

A = Lampu traffic menyala merah.

B = Semua kendaraan berhenti.

Maka bentuk argument diatas akan menjadi:

1. Jika A maka B

2. A
3. B

5. **Modus Tollens**

- Jika saya makan, maka saya kenyang.
- Saya tidak makan.
- Dengan demikian saya tidak kenyang.

Jika argument di atas diganto dengan huruf seperti berikut:

A = Saya makan

B = Saya kenyang

Maka bentuk argument diatas akan menjadi:

1. Jika A maka B
2. Bukan A
3. Bukan B

5.2. VALIDITAS ARGUMEN

Validitas argument adalah premis – premis yang diikuti oleh suatu kesimpulan yang berasal dari premis – premisnya dan bernilai benar. Validitas dapat dibedakan dengan kebenaran atau kesimpulan.

DAFTAR PUSTAKA

- Jong, J.S. Logika Matematika : Soal dan Penyelesaian Logika, Himpunan, Relasi, Fungsi. Penerbit Andi. 2014. Yogyakarta.
- Soesianto, F dan Djoni Dwijono. Logika Proposisional. Penerbit Andi. 2003 Yogyakarta.
- Soesianto, F dan Djoni Dwijono. Logika Matematika untuk Ilmu Komputer. Penerbit Andi. 2006 Yogyakarta.